SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1994-95

Davide Guidetti

SISTEMI DI CONVOLUZIONE ASTRATTI IN $\mathbb{R}$

23 marzo 1995

Tecnoprint - Bologna 1995

Riassunto. Si considera un sistema di convoluzione astratto di tipo molto generale in una variabile. Si dimostra che certe ipotesi naturali sul problema stazionario dipendente da un parametro ottenuto applicando la trasformata di Fourier rispetto alla variabile temporale sono necessarie per la buona posizione del problema. Tali condizioni sono anche sufficienti per certi valori del parametro di regolarità degli spazi considerati. Si forniscono delle applicazioni, in particolare a problemi ellittici con condizioni al contorno dinamiche.

Abstract. We study a quite general abstract convolution system on the line. Natural assumptions on the stationary problem depending on a parameter obtained applying the Fourier tranform with respect to time are shown to be necessary for the good position of the problem.Such conditions are also sufficient for certain values of the regularity parameter of the involved spaces. We give applications , in particular to elliptic problems with dynamic boundary conditions.

Scopo di questo seminario è illustrare alcuni risultati relativi al seguente sistema:

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}u(t) + (K*u)(t) = f(t),\ t \in \mathbb{R}, \\ &(\gamma u)'(t) - \mathcal{B}u(t) - (H*u)(t) = g(t),\ t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{1}$$

ove * rappresenta l' ordinaria convoluzione su tutto $\mathbb{R}$; considereremo tre spazi di Banach X, Y, Z, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X,Y)$, γ, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(X, Z)$, $K \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X,Y))$, $H \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X,Z))$, f e g sono funzioni definite su $\mathbb{R}$, a valori rispettivamente in Y e in Z. Si osservi che, nel caso particolare in cui $Y = \{0\}$, $X \subseteq Z$ e γ è l'operatore di immersione di X in Z, si ottiene il problema

$$u'(t) - \mathcal{B}u(t) - (H*u)(t) = g(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

Tale problema è stato diffusamente studiato nel caso in cui $H(t) = 0$ se $t < 0$ (si veda ad esempio la monografia [PR] con la sua bibliografia). Nel caso finito dimensionale cito anche il libro [GLS] dove è ampiamente trattato il problema

$$u'(t) - (\mu*u)(t) = g(t),\ t \in \mathbb{R} \tag{3}$$

nel caso generale in cui μ è una misura di Borel, non necessariamente col supporto contenuto in $[0, +\infty[$.

Il sistema di tipo più generale (rispetto a (2)) (1) mi è stato suggerito da un problema del tipo

$$\begin{aligned} &-\Delta u(t,x) + \int_{\mathbb{R}} K(t-s, x, \partial_x)\, u(s,x)\, ds = f(t,x),\ t \in \mathbb{R},\ x \in \Omega, \\ &\partial_t u(t, x') + \frac{\partial u}{\partial \nu}(t, x') - \int_{\mathbb{R}} H(t-s, x', \partial_x)\, u(s,x')\, ds = g(t,x'),\ t \in \mathbb{R},\ x' \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{4}$$

con Ω aperto regolare in $\mathbb{R}^n$, che interviene in problemi di viscoelasticità. Qui si può prendere (ad esempio) $X = W^{2,p}(\Omega)$, $Y = L^p(\Omega)$, $Z = W^{1-1/p,\,p}(\partial\Omega)$, con $1 < p < +\infty$.

Una variante interessante di (1) si ottiene sostituendo alla convoluzione su $\mathbb{R}$ la convoluzione nel senso delle funzioni T-periodiche, per un fissato $T > 0$. In tale caso si prenderanno K e H soltanto localmente sommabili e T-periodiche e si cercheranno soluzioni T-periodiche. Si osservi che ci si può comunque sempre ricondurre al problema (1), sostituendo a K e H due elementi qualunque K_1 e H_1, rispettivamente in $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X,Y))$ e in $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(X,Z))$,tali che per quasi ogni t

$$K(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} K_1(t + jT),\ H(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} H_1(t + jT) \tag{5}$$

Noi considereremo dunque anche nel caso periodico un' equazione del tipo (1). Si noti anche che, se vale (5), le trasformate di Fourier di K_1 e H_1 calcolate in $\frac{2j\pi}{T}$ $(j \in \mathbb{Z})$ si ottengono moltiplicando per T i j-esimi coefficienti di Fourier, rispettivamente di K e di H.

Torniamo allora al problema generale (1). Sia E uno spazio di Banach; poniamo $W^{0,p}(E):=$
$L^p(\mathbb{R}, E)$ se $1 \le p < +\infty$, $W^{0,\infty}(E)$ è lo spazio delle funzioni da $\mathbb{R}$ a E uniformemente continue e limitate. Sia $0 < \theta < 1$, $1 \le p \le +\infty$; poniamo
$W^{\theta,p}(E) := \{u \in W^{0,p}(E) \mid (t,s) \to |t - s|^{-\theta-1/p} \|u(t) - u(s)\| \in L^p(\mathbb{R}^2)\}$.
Se $\theta \in \mathbb{R}$ e $\theta \ge 1$, poniamo $W^{\theta,p}(E): = \{u \in W^{\theta-1,p}(E) \mid u' \in W^{\theta-1,p}(E)\}$, ove u' è la derivata di u nel senso delle distribuzioni a valori in E. Infine,
$W^{\theta,p}_{loc}(E) := \{u:\mathbb{R} \to E \mid$ per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ $\phi u \in W^{\theta,p}(E)\}$ e, se $T > 0$, $W^{\theta,p}_T(E):= \{u \in W^{\theta,p}_{loc}(E) \mid u$ è T-periodica $\}$.
Indichiamo con $\|.\|_{\theta,p,E}$ e con $\|.\|_{\theta,p,T,E}$ le norme naturali in $W^{\theta,p}(E)$ e in $W^{\theta,p}_T(E)$ rispettivamente.
Diremo che (1) è (θ,p)-ben posto se per ogni $f \in W^{\theta,p}(Y)$, per ogni $g \in W^{\theta,p}(Z)$, esiste unica la soluzione u in $W^{\theta,p}(X)$ tale che $\gamma u \in W^{1+\theta,p}(Z)$. Per $T > 0$, diremo che (1) è (θ,p,T)-ben posto se per ogni $f \in W^{\theta,p}_T(Y)$, per ogni $g \in W^{\theta,p}_T(Z)$, esiste unica la soluzione u in $W^{\theta,p}_T(X)$ tale che $\gamma u \in W^{1+\theta,p}_T(Z)$.
Nel seguito indicheremo con $\hat{u}$ la trasformata di Fourier di u.
Vale il seguente

Teorema 1. *Siano* $0 \le \theta < +\infty$, $1 \le p \le +\infty$. *Condizione necessaria affinchè* (1) *sia* (θ,p)*-ben posto è che per ogni* $\omega \in \mathbb{R}$, *per ogni* $y \in Y$, *per ogni* $z \in Z$ *il problema*

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}x + \hat{K}(\omega)x = y, \\ &i\omega\gamma x - \mathcal{B}x - \hat{H}(\omega)x = z \end{aligned} \tag{6}$$

abbia una e una sola soluzione $x \in X$ *ed esista* $C > 0$ *indipendente da* ω, y *e* z *tale che*

$$\|x\|_X + |\omega|\|\gamma x\|_Z \le C(\|y\|_Y + \|z\|_Z \tag{7}$$

La condizione data è anche sufficiente nel caso $\theta \notin \mathbb{Z}$.
Sia poi $T > 0$. *Condizione necessaria affinchè* (1) *sia* (θ,p,T)*-ben posto è che per ogni* $j \in \mathbb{Z}$, *per ogni* $y \in Y$, *per ogni* $z \in Z$ *il problema*

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}x + \hat{K}\left(\frac{2j\pi}{T}\right)x = y, \\ &i\frac{2j\pi}{T}\gamma x - \mathcal{B}x - \hat{H}\left(\frac{2j\pi}{T}\right)x = z \end{aligned} \tag{8}$$

abbia una e una sola soluzione $x \in X$ *ed esista* $C > 0$ *indipendente da* j, y *e* z *tale che*

$$\|x\|_X + |j|\|\gamma x\|_Z \le C(\|y\|_Y + \|z\|_Z \tag{9}$$

La condizione data è anche sufficiente nel caso $\theta \notin \mathbb{Z}$.

Diamo un cenno della dimostrazione del teorema 1 ; adottiamo la seguente notazione: indichiamo con $S(\omega)$ e $S_0(\omega)$ gli operatori da X a YxZ, tale che $S(\omega)x = (\mathcal{A}x + \hat{K}(\omega)x,\ i\omega\gamma x - \mathcal{B}x - \hat{H}(\omega)x)$,
$S_0(\omega)x = (\mathcal{A}x,\ i\omega\gamma x - \mathcal{B}x)$.

<u>1°passo : se il problema</u> (1) <u>è</u> (θ,p)-<u>ben posto, esistono</u> $\omega_0 \ge 0$, $C > 0$ <u>tali che per ogni</u> $\omega \in \mathbb{R}$ <u>con</u> $|\omega| \ge \omega_0$, <u>per ogni</u> $x \in X$,

$$\|x\|_X + |\omega|\, \|\gamma x\|_Z \leq C\, \|S(\omega)x\|_{Y\times Z} \tag{10}$$

Poichè la norma della trasformata di Fourier di una funzione sommabile tende a 0 all'infinito, per un semplice argomento di perturbazione basta provare (10) sostituendo a $S(\omega)$ $S_0(\omega)$. A tale scopo, fissiamo $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tale che $h(t) = 1$ su un intorno di 0 e poniamo, per $k \in \mathbb{N}$ e per $x \in X$ fissato,
$u_\omega(t) := \exp(i\omega t)\, h(t)\, x$. Consideriamo per semplicità il caso $\theta = 0$; poichè (1) è (0,p)-ben posto, esiste $C_1 > 0$ tale che per ogni k

$$\|u_\omega\|_{0,p,X} + \|\gamma u_\omega\|_{0,p,Z} \leq C_1 \left(\|\mathcal{A} u_\omega + K*u_\omega\|_{0,p,Y} + \|(\gamma u_\omega)' - \mathcal{B} u_\omega - H*u_\omega\|_{0,p,Z} \right) \tag{11}$$

Imponendo (11) si ottiene che, per certe costanti positive C_2, C_3, C_4

$$C_2(\|x\|_X + |\omega|\, \|\gamma x\|_Z) - C_3\, \|\gamma x\|_Z \leq C_4 \left(\|S_0(\omega)x\|_{Y\times Z} + o(1)\, \|x\|_X \right) \text{ (per } |\omega| \to +\infty) \tag{12}$$

da cui segue immediatamente la stima voluta.

<u>2° passo : Sia</u> (1) (θ,p)-<u>ben posto e sia</u> ω <u>tale che valga la stima</u> (10). <u>Allora, $S(\omega)$ è su</u> $Y\times Z$.
Per la stima ottenuta al primo passo basta provare che $S(\omega)$ ha immagine densa. Osserviamo ora che, se (1) è (θ,p)-ben posto, per ogni $\omega \in \mathbb{R}$ è (θ,p)-ben posto il seguente

$$\begin{aligned} &\mathcal{A} u(t) + (K_\omega * u)(t) = f(t),\ t \in \mathbb{R}, \\ &(\gamma u)'(t) + i\omega\gamma u(t) - \mathcal{B} u(t) - (H_\omega * u)(t) = g(t),\ t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{13}$$

con $K_\omega(t) := \exp(-i\omega t)\, K(t)$, $H_\omega(t) := \exp(-i\omega t)\, H(t)$, come si vede osservando che (13) è riconducibile a (1) introducendo la nuova incognita $v(t) := \exp(i\omega t)u(t)$. Si vede poi facilmente che, poichè convoluzione e derivazione commutano, che, se (1) è (θ,p)-ben posto, per ogni $k \in \mathbb{N}$ è anche (θ+k,p)-ben posto. Siano allora $y \in Y$ e $z \in Z$, sia h la stessa funzione usata nel primo passo; poniamo, per $j \in \mathbb{N}$, $f_j(t) := h(\frac{t}{j})y$, $g_j(t) := h(\frac{t}{j})z$ e indichiamo con u_j la soluzione con dati f_j e g_j di (13). Per le osservazioni precedenti $u_j \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} W^{\theta+k,p}(X)$, e quindi, per il teorema di immersione di Sobolev, è di classe C^∞;

inoltre, per ogni k, $u_j^{(k)}$ è la soluzione con dati $f_j^{(k)}$ e $g_j^{(k)}$. Si verifica immediatamente che, se $k \geq 2$, $(f_j^{(k)}, g_j^{(k)}) \to 0$ $(j \to +\infty)$ in $W^{\theta,p}(YxZ)$. Ne segue che, per $k \geq 2$, $u_j^{(k)} \to 0$ $(j \to +\infty)$ in $W^{\theta,p}(X)$. Da ciò si ha che $\|u_j^{(k)}(t)\|_X \to 0$ $(j \to +\infty)$ uniformemente su $\mathbb{R}$ per ogni $k \geq 2$. Per rendere il ragionamento più trasparente supponiamo ora $K = 0$ e $H = 0$. Si ha

$$\mathcal{A}u_j'(0) = f_j'(0) = 0, \quad \gamma u_j^{(2)}(0) + i\omega u_j'(0) - \mathcal{B}u_j'(0) = g_j'(0) = 0. \tag{14}$$

da cui, per gli argomenti precedenti e la stima (10), $\|u_j'(0)\|_X \to 0$ $(j \to +\infty)$. Da

$$\mathcal{A}u_j(0) = f_j(0) = f, \quad \gamma u_j'(0) + i\omega u_j(0) - \mathcal{B}u_j(0) = g_j(0) = g \tag{15}$$

segue allora che $(\mathcal{A}u_j(0), i\omega u_j(0) - \mathcal{B}u_j(0)) \to (y, z)$ in YxZ $(j \to +\infty)$.

<u>3° passo :Sia</u> (1) (θ,p)-<u>ben posto ; allora, per ogni $\omega \in \mathbb{R}$ $S(\omega)$ è un isomorfismo tra X e YxZ.</u>

Dai primi due passi sappiamo già che ciò accade se $|\omega|$ è abbastanza grande; Sia $\omega_0 := \sup\{\omega \in \mathbb{R} \mid S(\omega)$ non è un isomorfismo tra X e YxZ$\}$. E' facile vedere che tale insieme è chiuso in $\mathbb{R}$, e quindi $S(\omega_0)$ non è un isomorfismo tra X e YxZ. Sia $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ convergente decrescendo a ω_0. Si verifica facilmente che, necessariamente, $\|S(\omega_j)^{-1}\|_{\mathcal{L}(YxZ;X)} \to +\infty$ $(j \to +\infty)$. Dal teorema di Banach-Steinhaus segue l'esistenza di $(f,g) \in YxZ$ tale che, posto $x_j := S(\omega_j)^{-1}(f,g)$, eventualmente passando a una sottosuccessione, $\|x_j\|_X \to +\infty$ $(j \to +\infty)$. Poniamo ora $u_j(t) := \exp(i\omega_j t)h_j^{\xi}(t)x_j$ e imponiamo ancora la disuguaglianza (11) (sostituendo u_ω con u_j e 0 con θ; si arriva all'esistenza di $C_1 > 0$ tale che per ogni $j \in \mathbb{N}$

$$j^{1/p}\|x_j\|_X \leq C_1 j^{1/p}(\|y\|_Y + \|z\|_Z) + o(j^{1/p})\|x_j\|_X) \quad (j \to +\infty) \tag{16}$$

che porta, per j "grande", a $\|x_j\|_X \leq (C_1 + 1)(\|y\|_Y + \|z\|_Z)$, in contraddizione con $|1|x_j\|_X \to +\infty$ $(j \to +\infty)$.

Con ciò abbiamo provato la necessità della condizione indicata. Veniamo ora alla sufficienza nel caso $\theta \notin \mathbb{Z}$; cominciamo col generalizzare al caso vettoriale la nozione di distribuzione di tipo 0 regolare di ordine k (vedi [ME) :

Definizione 1. Sia E uno spazio di Banach e $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}; E)$. Diremo che T *è una distribuzione di tipo 0 regolare di ordine* k ($k \in \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$) se

(a) posto $U := T_{|\mathbb{R}\setminus\{0\}}$, $U \in C^k(\mathbb{R}\setminus\{0\}; E)$;

(b) per $j \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $j \le k$, $\|U(t)\| \le C(j)\, |t|^{-j-1}$;

(c) data $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ e $t > 0$, poniamo $\phi_t(s) := \phi(\frac{s}{t})$; si ha per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ $\sup_{t>0} \|T(\phi_t)\| < +\infty$.

Si può provare il seguente risultato:

Teorema 2. *Siano* E *e* F *spazi di Banach,* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}; \mathcal{L}(E,F))$ *una distribuzione di tipo* 0 *regolare di ordine* 1, *tale che* U *(vedi definizione 1) è sommabile su* $\{t \in \mathbb{R} \mid |t| \ge 1\}$. *Siano* $\theta \in \mathbb{R}^+\setminus\mathbb{N}$, $1 \le p \le +\infty$, $u \in W^{\theta,p}(E)$*; allora è possibile definire la convoluzione* $T*u$ *e tale convoluzione appartiene a* $W^{\theta,p}(F)$.

E' importante saper riconoscere una distribuzione di tipo 0 dalla sua trasformata di Fourier; a tale scopo vale il seguente risultato (vedi [ME] cap. IV):

Teorema 3. *Sia* E *uno spazio di Banach,* $V \in L^\infty(\mathbb{R}; E)$, *tale che* $V_{|\mathbb{R}\setminus\{0\}} \in C^\infty(\mathbb{R}\setminus\{0\}; E)$ *e per ogni* $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ $\|V^{(k)}(\omega)\| \le C(k)\, |\omega|^{-k}$ ($\omega \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *con* $C(k) \ge 0$). *Posto* $T := \mathcal{F}^{-1}V$, T *è una distribuzione di tipo 0 regolare di ordine infinito. Se, inoltre,* $V \in C^\infty(\mathbb{R}; E)$, *se* U *è la restrizione di* T *a* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, U *è a decrescenza rapida all'infinito.*

<u>Dimostrazione del teorema 1; 4° passo</u>: <u>sufficienza della condizione necessaria nel caso</u> $\theta \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$, $K \in \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathcal{L}(X,Y))$, $H \in \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathcal{L}(X,Z))$; resta da far vedere che la condizione di cui si è provata la necessità è anche sufficiente nel caso $\theta \notin \mathbb{Z}$; cominciamo da un caso particolare: supponiamo $K \in \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathcal{L}(X,Y))$ e $H \in \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathcal{L}(X,Y))$. Per $\omega \in \mathbb{R}$, poniamo $V(\omega) := S(\omega)^{-1}$; per (10)

$$\|V(\omega)\|_{\mathcal{L}(Y\times Z;X)} \le C, \quad |\omega|\, \|\gamma V(\omega)\|_{\mathcal{L}(Y\times Z;Z)} \le C \tag{17}$$

E' inoltre chiaro che $V \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{L}(Y\times Z; X))$. Da $S(\omega)V(\omega) = I_{Y\times Z}$, derivando rispetto a ω si ottiene per ogni $(y,z) \in Y\times Z$

$$V'(\omega)(y,z) = -V(\omega)S'(\omega)V(\omega)(y,z) = -V(\omega)(\hat{K}'(\omega)S(\omega)(y,z), (i\gamma - \hat{H}'(\omega))V(\omega)(y,z)) \tag{18}$$

da cui, per (17),

$$|\omega|\, \|V'(\omega)\|_{\mathcal{L}(Y\times Z;X)} \le C_1, \quad |\omega|^2\, \|\gamma V'(\omega)\|_{\mathcal{L}(Y\times Z;Z)} \le C_1 \tag{19}$$

Iterando il ragionamento, si ottiene per ogni $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

$$|\omega|^k\, \|V^{(k)}(\omega)\|_{\mathcal{L}(Y\times Z;X)} \le C_k, \quad |\omega|^{k+1}\, \|\gamma V^{(k)}(\omega)\|_{\mathcal{L}(Y\times Z;Z)} \le C_k \tag{20}$$

Segue allora dal teorema 3 che, posto $T := \mathcal{F}^{-1} V$, T e $(\gamma T)'$ sono distribuzioni di tipo 0 regolari di ordine infinito a valori rispettivamente in $\mathcal{L}(Y\times Z; X)$ e in $\mathcal{L}(Y\times Z;Z)$. Di conseguenza, per il teorema 2, se $(f,g) \in W^{\theta,p}(Y\times Z)$, con $\theta \in \mathbb{R}^+\setminus\{0\}$, posto $u := T*(f,g)$, si ha $u \in W^{\theta,p}(X)$ e $\gamma u \in W^{1+\theta,p}(Z)$. Dunque, (1) è (θ,p)-ben posto nel caso $K \in \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathcal{L}(X,Y))$ e $H \in \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathcal{L}(X,Z))$.

<u>5° passo: sufficienza della condizione necessaria nel caso</u> $\theta \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$.
A tale scopo, eneunciamo i seguenti

Lemma 1. *Siano* $K \in L^1(\mathbb{R}; \mathcal{L}(X,Y))$, $H \in L^1(\mathbb{R}; \mathcal{L}(X,Z))$, $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. *Sia poi ben posto per ogni* $\omega \in \mathbb{R}$ *il problema* (6) *e valga* (7). *Allora,* $\mathcal{F}^{-1}(\chi\, S(.)^{-1}) \in L^1(\mathbb{R}; \mathcal{L}(Y\times Z;X))$.

Lemma 2. *Sotto le condizioni del lemma 1, esistono* $K_0 \in L^1(\mathbb{R}; \mathcal{L}(X,Y))$ *e* $H_0 \in L^1(\mathbb{R}; \mathcal{L}(X,Z))$ *tali che :*
(a) esiste $\omega_0 \ge 0$ *tale che* $\hat{K}_0(\omega) = \hat{K}(\omega)$ *e* $\hat{H}_0(\omega) = \hat{H}(\omega)$ *se* $|\omega| \ge \omega_0$;
(b) sotituendo a K K_0 *e ad* H H_0 *si ottiene un problema* (θ,p)*- ben posto.*

Dati allora $f \in W^{\theta,p}(Y)$ e $g \in W^{\theta,p}(Z)$, indichiamo con $S_0(f,g)$ la soluzione u di

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}u(t) + (K_0*u)(t) = f(t),\ t \in \mathbb{R}, \\ &(\gamma u)'(t) - \mathcal{B}u(t) - (H_0*u)(t) = g(t),\ t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{21}$$

e riscriviamo (1) nella forma

$$\mathcal{A}u(t) + (K_0 * u)(t) = (K_0 - K)*u + f(t),\ t \in \mathbb{R},$$
$$(\gamma u)'(t) - \mathcal{B}u(t) - (H_0 * u)(t) = (H - H_0)*u + g(t),\ t \in \mathbb{R}. \tag{22}$$

Assumiamo come nuove incognite $\phi := \mathcal{A}u + K_0 * u$, $\psi := (\gamma u)' - \mathcal{B}u - H_0 * u$. Si tratta allora di mostrare che il sistema

$$\phi = (K_0 - K)*S_0(\phi,\psi) + f,$$
$$\psi = (H - H_0)*S_0(\phi,\psi) + g \tag{23}$$

è ben posto in $W^{\theta,p}(YxZ)$. Sia $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tale che $\chi(\omega) = 0$ se $|\omega| \geq \omega_0$ (vedi lemma 2) e $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tale che $\mathcal{F}g = \chi$. Si ha allora per ogni $(\phi,\psi) \in W^{\theta,p}(YxZ)$ e per il lemma 1

$$(K_0 - K)*S_0(\phi,\psi) = (K_0 - K)*g*S_0(\phi,\psi) = (K_0 - K)*K_1*(\phi,\psi) \tag{24}$$
$$(H - H_0)*S_0(\phi,\psi) = (H - H_0)*g*S_0(\phi,\psi) = (H - H_0)*K_1*(\phi,\psi) \tag{25}$$

con $K_1 \in L^1(\mathbb{R}; \mathcal{L}(YxZ;X))$. Ne segue che (23) è della forma

$$(\phi,\psi) = \mathcal{K}*(\phi,\psi) + (f,g) \tag{26}$$

con $\mathcal{K} \in L^1(\mathbb{R}; \mathcal{L}(YxZ))$. Una conseguenza della buona posizione del problema stazionario dipendendente da un parametro è che per ogni $\omega \in \mathbb{R}$ esiste $(I - \hat{\mathcal{K}}(\omega))^{-1}$ in $\mathcal{L}(YxZ)$. Segue allora da un classico teorema di Paley-Wiener (vedi [GLS] capitolo 2) che esiste $\mathcal{H} \in L^1(\mathbb{R}; \mathcal{L}(YxZ))$ tale che $(I - \hat{\mathcal{K}}(\omega))^{-1} = I + \hat{\mathcal{H}}(\omega)$ per ogni $\omega \in \mathbb{R}$. Allora (26) ammette la soluzione in $W^{\theta,p}(YxZ)$ $(\phi,\psi) = (f,g) + \mathcal{H}*(f,g)$.

Consideriamo ora il caso $\theta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; indichiamo con Z_1 $\gamma(X)$ e introduciamo la seguente ulteriore ipotesi (h1):

(h1): *l'opetore* $(\mathcal{A},\gamma)$ *da* $X \to YxZ_1$, *che associa a* x $(\mathcal{A}x, \gamma x)$ *è una biiezione.*

Se vale (h1) possiamo allora introdurre il seguente operatore G:

$D(G) := Z_1$, se $z \in Z_1$, $Gz := B(\mathcal{A},\gamma)^{-1}(0, z)$. In generale, G è un operatore non limitato in Z di dominio Z_1. E' facile vedere che, se (6) è ben posto per ogni $\omega \in \mathbb{R}$ e vale (7), $i\mathbb{R} \subseteq \rho(G)$ e vale

$$\|(i\omega - G)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z)} \leq \frac{C}{1+|\omega|} \tag{27}$$

per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, per una certa $C > 0$. Per $0 < s < 1$, $1 \leq p \leq +\infty$, poniamo

$$(Z, D(G))_{\theta,p} := \{z \in Z \mid \omega^{s-1/p} G(i\omega - G)^{-1} z \in L^p([\omega_0, +\infty[; Z)\} \tag{28}$$

per qualche $\omega_0 \geq 0$, con $\frac{1}{\infty} = 0$(si può vedere che la definizione è indipendente da ω_0).

Vale il seguente

Teorema 4. *Supponiamo che* X,Y,Z *siano spazi di Banach,* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X,Y), \gamma, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(X,Z)$. *Supponiamo*

(a) *esista* $\omega_0 \geq 0$ *tale che, se* $|\omega| \geq \omega_0$ $(\omega \in \mathbb{R})$, $S_0(\omega)$ *sia un isomorfismo di* X *su* YxZ *e*

$$\sup_{|\omega|\geq\omega_0} (\|S_0(\omega)^{-1}\|_{\mathcal{L}(YxZ;X)} + |\omega|\, \|\gamma S_0(\omega)^{-1}\|_{\mathcal{L}(YxZ;Z)}) < +\infty; \tag{29}$$

(b) *valga* (h1);

(c) *per certi* $s \in]0, 1[$, $p \in [1, +\infty]$, *esistano spazi di Banach* X^* *e* Y^* *immersi rispettivamente in* X *e* Y *tali che* $\mathcal{A}(X^*) \subseteq Y^*$, $\gamma(X^*)$, $\mathcal{B}(X^*) \subseteq (Z, D(G))_{s,p}$;

(d) $K \in L^1(\mathbb{R}; \mathcal{L}(X^*, Y^*))$, $H \in L^1(\mathbb{R}; \mathcal{L}(X^*, (Z, D(G))_{s,p})$;

(e) *per ogni* $\omega \in \mathbb{R}$ $S(\omega)$ *è un isomorfismo di* X^* *su* $Y^* \times (Z, D(G))_{s,p}$ *e*

$$\sup_{\omega\in\mathbb{R}} \{\|S(\omega)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y^* \times (Z, D(G))_{s,p};X)} + |\omega|\|S(\omega)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y^* \times (Z, D(G))_{s,p};(Z, D(G))_{s,p};X)}\} < +\infty.$$

Allora, il problema (1) è (0,p)-*ben posto sostituendo a* $X X^*$, *a* $Y Y^*$ *e a* $Z (Z, D(G))_{s,p}$.

Nel caso T-*periodico basta richiedere che la condizione* (e) *valga per* $\omega \in \{\frac{2j\pi}{T} \mid j \in \mathbb{Z}\}$.

Indichiamo ora un'applicazione dei risultati ottenuti al problema (4); supponiamo preliminarmente che Ω sia un aperto regolare (con la frontiera di classe C^∞ per semplicità) limitato in $\mathbb{R}^n$; il seguente lemma è fondamentale:

Lemma 3. *Sia* $1 < p < +\infty$, $s \in \mathbb{R}$, $s + 2 > 1+p^{-1}$; *siano* $f \in H^{s,p}(\Omega)$, $g \in W^{s+1-1/p,p}(\partial\Omega)$. *Consideriamo il problema*

$$-\Delta u = f, \qquad i\omega\gamma u + \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \tag{30}$$

Esistono $\omega_0 \geq 0$ e $C > 0$ *tali che, per ogni* $\omega \in \mathbb{R}$, *con* $|\omega| \geq \omega_0$ *il problema* (30) *ha un'unica soluzione* u in $H^{s+2,p}(\Omega)$ *e si ha*

$$\|u\|_{H^{s+2,p}(\Omega)} + |\omega|\, \|\gamma u\|_{W^{s+1-1/p,p}(\partial\Omega)} \leq C(\|f\|_{H^{s,p}(\Omega)} + \|g\|_{W^{s+1-1/p,p}(\partial\Omega)} \tag{31}$$

Siano ora $K(t,x,\partial_x) := \sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}(t,x)\partial_{ij} + = \sum_{j=1}^{n} k_j(t,x)\partial_j + k_0(t,x)$, con i coefficienti k_{ij} e k_j in $L^1(\mathbb{R}; C^\infty(\bar{\Omega}))$, $H(t,x',\partial) = \sum_{j=1}^{n} h_j(t,x')\partial_j + h_0(t,x')$ con gli h_j in $L^1(\mathbb{R}; C^\infty(\partial\Omega))$ $(0 \leq j \leq n)$. Poniamo, per $\omega \in \mathbb{R}$. Indichiamo con $\hat{K}(\omega, x, \partial_x)$ e $\hat{H}(\omega,x',\partial_x)$ gli operatori ottenuto da $K(t,x,\partial_x)$ e $H(t,x',\partial_x)$ prendendo le trasformate di Fourier dei coeffiecienti rispetto alla variabile t. Introduciamo la seguente ipotesi (h2);

(h2) *per ogni* $\omega \in \mathbb{R}$ *l'operatore* $-\Delta + \hat{K}(\omega, ., \partial_x)$ *è propriamente ellittico e, associato all' operatore di frontiera* $\frac{\partial}{\partial \nu} - \hat{H}(\omega,x',\partial_x)$, *soddisfa la condizione complementare; inoltre*

$$-\Delta u + \hat{K}(\omega, ., \partial_x)u = 0, \qquad i\omega\gamma u + \frac{\partial u}{\partial \nu} - \hat{H}(\omega,x',\partial_x)u = 0 \tag{32}$$

ha in $C^\infty(\bar{\Omega})$ *solo la soluzione nulla.*

Poniamo ora $X := H^{s+2,p}(\Omega)$, $Y := H^{s,p}(\Omega)$, $Z := W^{1+s-1/p,p}(\partial\Omega)$. Usando il lemma 3 e l'ipotesi (h2) si vede facilmente che la condizione necessaria per la buona posizione di (1) è soddisfatta. Ne segue che il problema è (θ,q)-ben posto per ogni $\theta \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$, per ogni $q \in [1,+\infty]$. Osserviamo inoltre che $\gamma(H^{s+2,p}(\Omega)) = W^{s+2-1/p,p}(\partial\Omega)$ e che $u \to (-\Delta u, \gamma u)$ è un isomorfismo di $H^{s+2,p}(\Omega)$ su $H^{s,p}(\Omega) \times W^{s+2-1/p,p}(\partial\Omega)$. Nel nostro caso si ha dunque, per $\rho \in]0, 1[$,

$$(Z, D(G))_{\rho,p} = (W^{1+s-1/p,p}(\partial\Omega), W^{2+s-1/p,p}(\partial\Omega)) = W^{1+\rho+s-1/p,p}(\partial\Omega) \tag{33}$$

Poniamo allora $X^* := H^{s+2+\rho,p}(\Omega)$, $Y^* := H^{s+\rho,p}(\Omega)$; possiamo chiaramente applicare il teorema 3. Ne deriva chiaramente che

Teorema 4. *Consideriamo il problema* (4), *sotto le ipotesi di regolarità fatte su* Ω *e supponiamo che la condizione* (h2) *sia soddisfatta; siano* $p \in]1,+\infty[$, $s \in \mathbb{R}$, $s+2 > 1+1/p$; *allora, per ogni* $\theta \in [0, +\infty[$, *dati* $f \in W^{\theta,p}(H^{s,p}(\Omega))$, $g \in W^{\theta,p}(W^{1+s-1/p,p}(\partial\Omega))$, *il problema* (4) *ha un'unica soluzione* $u \in W^{\theta,p}(H^{2+s,p}(\Omega))$, *tale che* $\gamma u \in W^{1+\theta,p}(W^{1+s-1/p,p}(\partial\Omega))$.

Bibliografia

[GLS] G. Gripenberg, S.-O. Londen, O. Staffans, "Volterra integral and functional equations", Encyclopedia of Math. and its Appl., Cambridge Univ. Press (1990).

[ME] G. Metivier, "Integrales Singulieres", Université de Rennes (D.E.A 1981/82)

[PR] J. Prüss, "Evolution integral equations and applications", Monographs in Mathematics, Birkhäuser (1993).